ソリトンの相互作用と連立微分方程式

静岡大　米　山　　徹

§1　はじめに

古典的な波動の体系を扱う。いろいろの方程式について今迄得られている exact N－ソリトン解[1),2),3),4)]を，単一ソリトンがNコある時の話として見直す一般的処法について述べる。今迄の所，Korteweg-de Vries (KdV) 方程式について詳しく調べてあるので，それを中心に述べる。尚研究会以後に発展した§4全部その他を含みます。

§2　物理的に自然なKdV方程式の拡張は又その切離しでもあること

ここでは次の形のKdV方程式を考える。

$$(\partial/\partial t)u+6u(\partial/\partial x)u+(\partial/\partial x)^3u=0 \tag{1}$$

第2項は非線形効果を表わしている。uの他にu'が空間的に近くにあって，単純に$u+u'$で波が表わせる場合，uについての方程式(1)の第2項は

$$6u(\partial/\partial x)u\to 6(u+u')(\partial/\partial x)u$$

となる。同じ様にしてu_1，u_2，…，u_NのNコのソリトンが空間的に(互に離れていても，重なっていても)同時に存在する時

$$u^{(N)}=\sum_{i=1}^{N}u_i \tag{2}$$

と単純和を作り，各u_iについて

$$(\partial/\partial t)u_i+6u^{(N)}(\partial/\partial x)u_i+(\partial/\partial x)^3u_i=0 \tag{3}$$

という連立非線形微分方程式を考えることが出来る。これを相互作用 KdV (Interacting KdV)方程式と呼ぼう。尚，方程式(3)の形は既にGGKM[3)]が the associated linear eq. to the KdV eq. という名で求めている。

別の見方が出来る。(2)を考慮すると，

$$\sum_{i=1}^{N} (3) \text{式}$$

は $u^{(N)}$ についての元のKdV方程式(1)となっている。即ちNコの方程式(3)は(1)を切離(decouple)したものということが出来る。

変形KdV方程式では(3)に対応する形はすぐ分るが，sine-Gordon方程式では一寸むずかしく，存在しないとずっと思っていたが，最近(12月末)になってその形が得られた。また，exponential latticeを記述する戸田方程式についても得られている。勿論NS変換[5)]で次の様になる。

$$\text{相互作用戸田 eq.} \xrightarrow{h \to 0^+} \text{相互作用KdV eq.} \tag{4}$$

ここまでは方程式の形だけから分る話で，解の具体的な関数形はもとより，その形(次§の$\partial \cdots$の形)も利用していない。

§3 連立微分方程式の解が求められること

前§の様に考えて(3)が出ても，解が具体的に分らなければ，それまでであって面白くない。所が次の様にして得られるのである。

先ず：(1)のexact Nソリトン解が文献1)，2)，3)，4)等で求まっているが，それを出発点とする。即ち

$$\gamma_i \equiv \kappa_i x - 2^2 \kappa_i^3 t \ (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{5}$$

で，κ_i は任意の正の数とし，

$$\Delta^{(N)}(x, t) \equiv \det \left\{ \delta_{kl} + \frac{C_k C_l}{\kappa_k + \kappa_l} \exp(\gamma_k + \gamma_l) \right\} \tag{6}$$

$$(k, l = 1, 2, \cdots, N)$$

(δ_{kl} はクロネッカーの δ，C_i は正数)

とすると(1)のN−ソリトン解 $u^{(N)}$ は

$$u^{(N)} = 2\partial^2 \ln \Delta \quad (\partial \equiv \partial/\partial x) \tag{7}$$

である。又 α，β' を t の任意関数として

$$f \equiv \Delta^{(N)} \exp\{\alpha(t) x + \beta'(t)\} \tag{8}$$

を $\Delta^{(N)}$ の代りに使っても同じ解となる。

次に準備。N コの空間独立変数 x_i ($i=1, 2, \cdots N$) を考えて,

$$\Gamma_i \equiv \kappa_i x_i - 2^2 \kappa_i^3 t \tag{9}$$

とする。(5) で $\kappa_i x$ を $\kappa_i x_i$ としたのである。時間でも同様に N コの t_i を導入できるが，ここでは使わない。戸田方程式の時には利用する。(8) で $\gamma_i \to \Gamma_i$ として f から F を作る。但しその時 (8) の

$$\alpha(t)x+\beta'(t)$$

を， $\alpha_i(t)$, $\beta(t)$ を t の任意関数として,

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\gamma_i + \beta(t)$$

としておく。$\Delta^{(N)}$ は (6) より γ_i を $\exp \gamma_i$ の形でのみ含み，それらの有理関数であるから F も $\exp \Gamma_i$ の有理関数である。

$$F \equiv F(\exp \Gamma_1, \ \exp \Gamma_2, \ \cdots, \ \exp \Gamma_N) \tag{10}$$

又，空間統一演算子 (space unifying operator)$\tilde{}$ を導入する。即ち

$$\partial_i \equiv \partial / \partial x_i \tag{11}$$

と書くことにすると $\tilde{}$(tilde) の働きは

$$\tilde{\partial}_i G(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_N) = \frac{\partial}{\partial x_i} G \,|_{x_1=x_2=\cdots=x_N=x} \text{。} \tag{12}$$

すると

$$\partial = \partial / \partial x = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\partial}_k \tag{13}$$

$$\partial \tilde{\partial}_i = \tilde{\partial}_i \sum \partial_k \tag{14}$$

等が成り立つ。

さて，これらを利用すると

$$u^{(N)} = 2\partial \sum \tilde{\partial}_k \ln F = 2 \sum \tilde{\partial}_l \sum \partial_k \ln F$$

となるが，これを (1) に代入し，変形すると

$$\sum_i \widetilde{\partial}_i \left[(\partial/\partial t)(2\sum \partial_k \ln F) + 3\{\sum \partial_l (2\sum \partial_k \ln F)\}^2 \right.$$

$$\left. + (\sum \partial_l)^3 (2\sum \partial_k \ln F) \right] = 0 \tag{15}$$

となる。(15) の [　] ≡ G は $\exp \varGamma_i$ の有理関数 F から有限回の代数操作($N.B.$ $\partial_i \exp \varGamma_i = \kappa_i \exp \varGamma_i$, etc)によって作られたもの，即ちやはり $\exp \varGamma_i$ の有理関数である。よって G は空間独立変数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ (及び t) の関数として恒等的に 0 となる：

$$G \equiv 0 \text{。} \tag{16}$$

$$\therefore \quad \widetilde{\partial}_i G = 0 \text{。} \tag{17}$$

(13)，(14) を適当に使うと (17) は

$$(\partial/\partial t)(2\partial\widetilde{\partial}_i \ln F) + 6(2\partial^2 \ln \widetilde{F})\partial(2\partial\widetilde{\partial}_i \ln F)$$

$$+ \partial^3 (2\partial\widetilde{\partial}_i \ln F) = 0 \text{。} \tag{18}$$

よって

$$u_i \equiv 2\partial\widetilde{\partial}_i \ln F \tag{19}$$

が (3) の解であることが分る。又確かに

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = 2\,\partial \sum_i \widetilde{\partial}_i \ln F = 2\,\partial^2 \ln f = u^{(N)} \tag{20}$$

と単純和になっている。

u_i の性質は省略する。

この § では $u = \partial A$ (ここでは $A = 2\,\partial \ln f$) という形になっていることのみが使われた。次の § ではもっと具体的な，ある関数形であることが使われる。

§4　逆散乱法と関係が直接つけられること

方程式(3)は，形は既に文献 3) に与えられている。そしてそれらを満す量がいく種類か与えられている。その一つに $\kappa_i \psi_i^2$ (κ_i^2 は，逆散乱法で KdV を解く時の“Schr. eq.”の i 番目の固有値，ψ_i は固有関数）がある。そして $t \to \pm\infty$ で $4\kappa_i \psi_i^2$ が単一ソリトンになることも与えられている。更に，

$$u = \sum 4\kappa_i \psi_i^2$$

も与えられている。我々の u_i も，やろうと思えば $t \to \pm\infty$ で単一ソリトンとなることが示せ，且(3)を満しているので，間接的ではあるが

$$u_i = 4\kappa_i \psi_i^2 \tag{21}$$

が分る。しかし，直接(21)を示すことが出来る。

それには和達－沢田の表示[4)]を利用する。そこで得られたことを先ず述べる。$N \times N$ 行列の I と B を考え，その要素を

$$\left.\begin{aligned} I_{kl} &= \delta_{kl} \\ B_{kl} &= \frac{C_k C_l}{\kappa_k + \kappa_l} \exp(\gamma_k + \gamma_l) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

とすると，

$$\ln \det(I+B) = \mathrm{Tr}\ \ln(I+B)$$

と

$$\partial B_{kl} = (\kappa_k + \kappa_l) B_{kl}, \tag{23}$$

及び B が対称行列であることを使って

$$\partial \ln \det(I+B) = \sum_{k,l} \left(\frac{I}{I+B}\right)_{kl} \partial B_{lk} = 2\sum_k \kappa_k \left(\frac{B}{I+B}\right)_{kk}$$

$$= 2\sum \kappa_k - 2\sum \kappa_k \left(\frac{I}{I+B}\right)_{kk}。 \tag{24}$$

次に

$$\phi_m \equiv C_m \exp \gamma_m \tag{25}$$

$$\psi_l \equiv \sum_m \left(\frac{I}{I+B}\right)_{lm} \phi_m \tag{26}$$

と定義すると，ψ_l は Schr. eq. の固有関数であることが証明出来る。A が正規行列の時

$$\partial A^{-1} = -A^{-1}(\partial A)A^{-1} \tag{27}$$

となることと，(24) とから

$$u = 2\partial\{\partial \ln \det(I+B)\}$$

$$= 4 \sum_{k,l,m} \kappa_k \left(\frac{I}{I+B}\right)_{kl} \phi_l \phi_m \left(\frac{I}{I+B}\right)_{mk}$$

$$= 4 \sum_l \kappa_l \psi_l^2 \quad。 \tag{28}$$

以上は文献 4) の，ここで必要な部分である。

さて，(12) で導入した $\tilde{\partial}_i$ を使うと

$$\underset{\sim}{B}_{kl} \equiv \frac{C_k C_l}{\kappa_k + \kappa_l} \exp(\Gamma_k + \Gamma_l) \tag{29}$$

$$\tilde{\partial}_i \underset{\sim}{B}_{kl} = \kappa_i(\delta_{ik} + \delta_{il}) B_{kl} \tag{30}$$

であるから

$$\mathrm{Tr}\, \tilde{\partial}_i \ln(I + \underset{\sim}{B}) = 2\kappa_i \left(\frac{B}{I+B}\right)_{ii} = 2\kappa_i - 2\kappa_i \left(\frac{I}{I+B}\right)_{ii} \quad。 \tag{31}$$

よって，

$$u_i = 2\partial \tilde{\partial}_i \ln \det(I+B) = -4\kappa_i \partial \left(\frac{I}{I+B}\right)_{ii}$$

$$= 4\kappa_i \sum_{k,l} \left(\frac{I}{I+B}\right)_{ik} \phi_k \phi_l \left(\frac{I}{I+B}\right)_{li}$$

$$= 4\kappa_i \psi_i^2 \quad。 \tag{32}$$

これで直接に関係がついた。

§5　古典的波動としてのソリトンには互に引力が働くこと

多ソリトン解の漸近的性質は文献 2) で詳しく調べられていて，２つのソリトンの相互作用の単なる和と思ってよいことが示されている。よって$N=2$の場合を調べればよい。詳しくは文献 6) を見てほしいが，ともかく散乱前後でソリトンが夫々 identity を保っているとする（ソリトンの本来の意義！）ならば，互に引力であることは自明であろう。

最後に，文献 3)，4) を教えて下さった和達三樹教授に感謝します。その結果§4の発展がありました。

（1984. 1. 15　記）

参考文献

1) R. Hirota, Phys. Rev. Letters **27** (1971), 1192.
2) M. Wadati and M. Toda, J. Phys. Soc. Japan **32** (1972), 1403.
3) C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Commun. Pure Appl. Math. **27** (1974), 97.
4) M. Wadati and K. Sawada, J. Phys. Soc. Japan **48** (1980), 312.
5) N. Saitoh, J. Phys. Soc. Japan **49** (1980), 409.
6) T. Yoneyama, The Korteweg-de Vries Two-Soliton Solution as Interacting Two Single Solitons, submitted to Progress Letters.

（追記）　Int. KdV eqs. (3) の Lax 形式は，

$$L=-\partial^2-u\,,\quad L_i=-\partial\,\partial_i-u_i\,,$$

$$B_i=4\,\partial^2\,\partial_i+4\,u\,\partial_i+2\,u_i\,\partial+3\,u_{i,x}$$

として

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,L_i=[\,B_i,L\,]$$

となるなど，現在進行中です。　（1月25日）